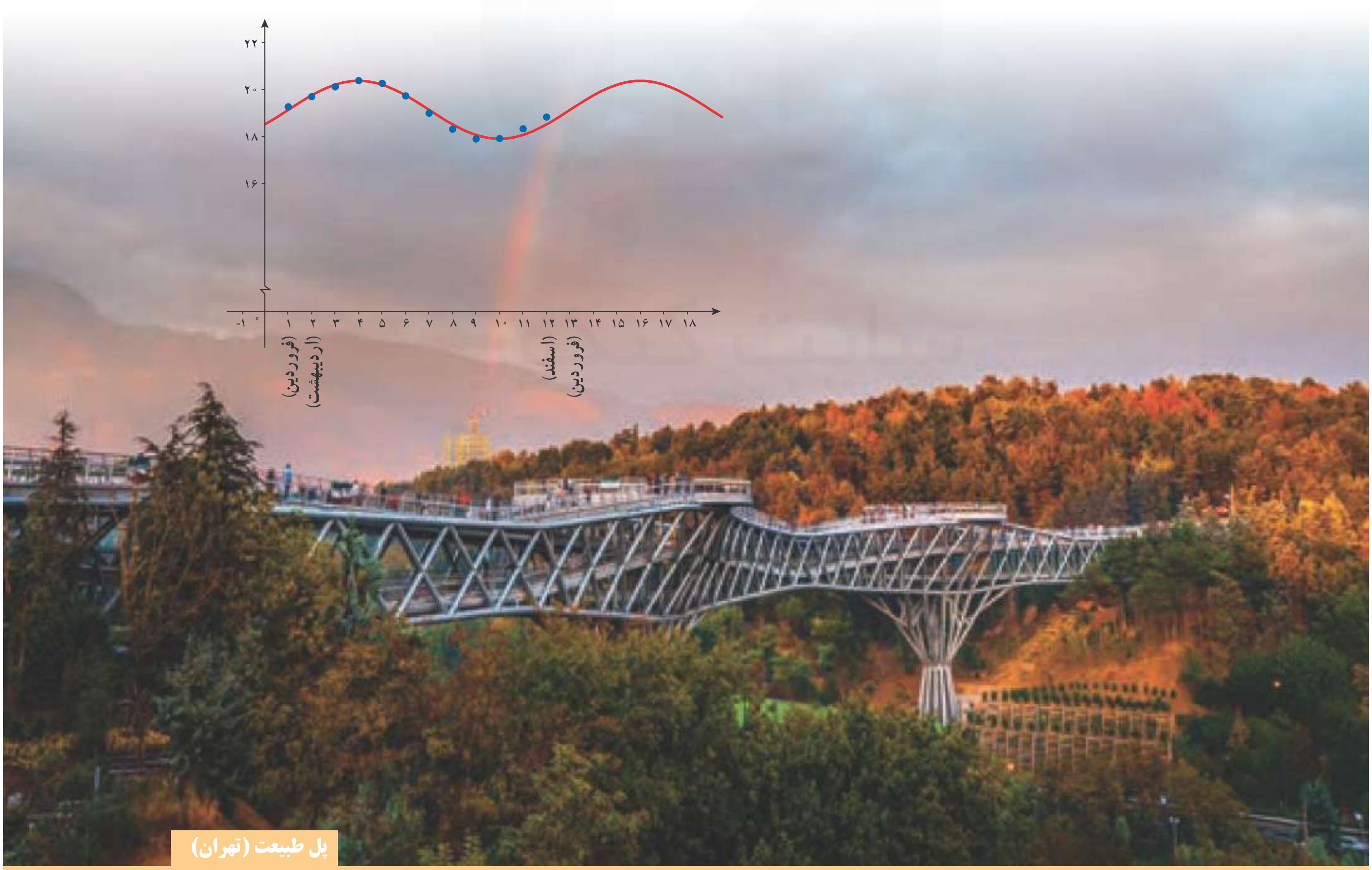
تابع

فصل ۱



پل طبیعت (تهران)

بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل‌سازی می‌شوند. تبدیل نمودار تابع $y=\sin x$ به‌صورت $y=1/24\sin(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{6})+19/14$ ، مدل ریاضی زمان‌های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

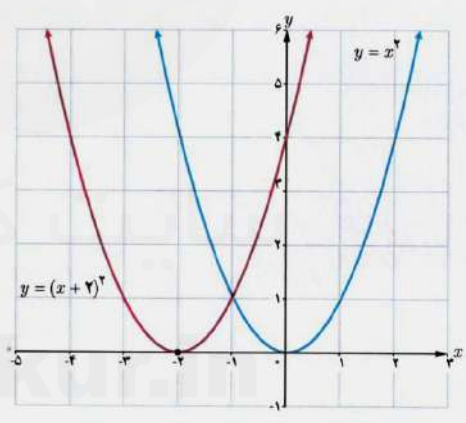
درس ۱

تبدیل نمودار توابع

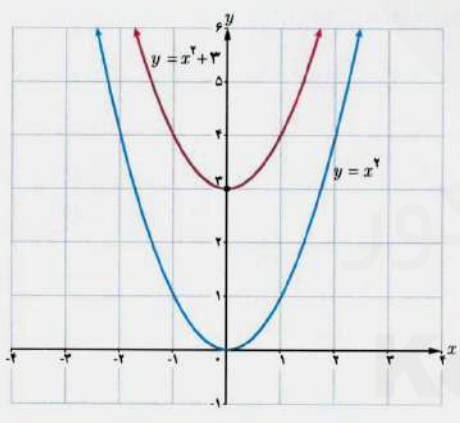
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع $y=(x+2)^2$ و $y=x^2+3$ را به کمک نمودار تابع $y=x^2$ رسم کنید.



(الف)



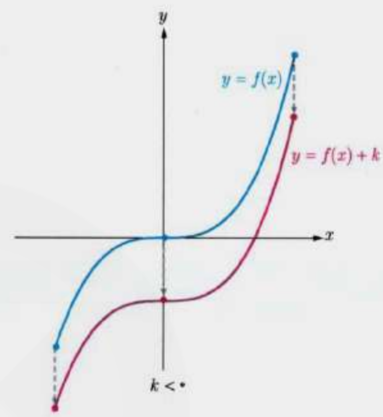
(ب)

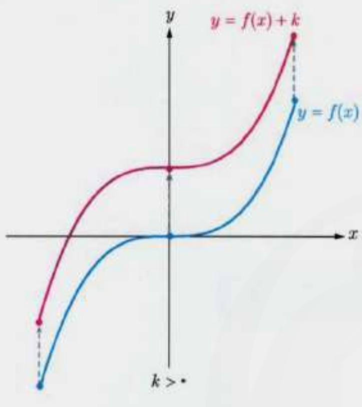
در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x)+k$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$g(x_0)=f(x_0)+k=y_0+k$$

بنابراین نقطه (x_0, y_0+k) از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار f است.

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$، اگر $k > 0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.





به روش مشابه، اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع h به‌صورت $h(x) = f(x+k)$ تعریف شده باشد، آنگاه:

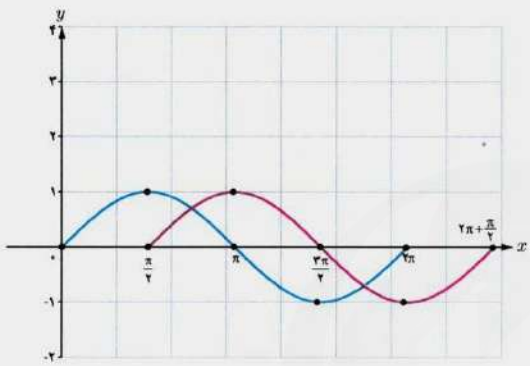
$$h(x_0 - k) = f(x_0 - k + k) = f(x_0) = y_0$$

بنابراین نقطه $(x_0 - k\ ,\ y_0)$ از نمودار تابع h متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع f است.

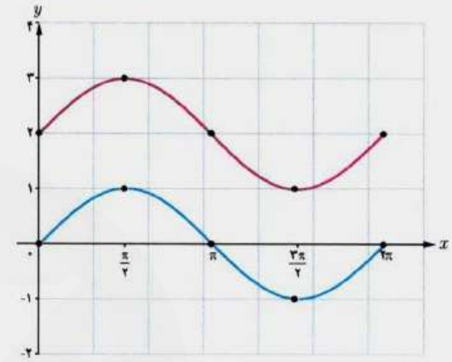
برای رسم نمودار $y = f(x+k)$، اگر $k > 0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

۴

مثال : نمودار تابع $y=\sin x$ با دامنه $[\circ,۲\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=\sin x+۲$ و $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $f(x)$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{۲}$ واحد به راست انتقال دهیم، $g(x)$ رسم می‌شود. (شکل ب)



(ب)



(الف)

کار در کلاس

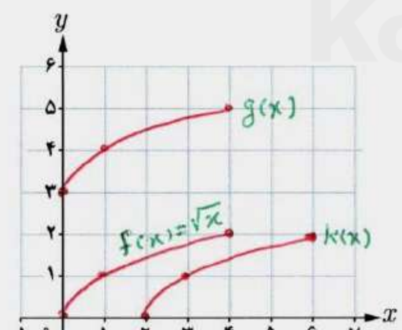
۱

الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با دامنه $[\circ,۴]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

ب) نمودار توابع $k(x)=f(x-۲)$ و $g(x)=f(x)+۳$ را به کمک انتقال رسم کنید.

ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

	$f(x)=\sqrt{x}$	$k(x)=f(x-۲)$	$g(x)=f(x)+۳$
دامنه	$[\circ,۴]$	[۲و۶]	[۰و۴]
برد	[۰و۲]	[۰و۲]	[۳و۵]



ج) بازه دامنه تابع k از انتقال بازه دامنه f در راستای افقی به اندازه ۲ واحد به سمت راست به دست می‌آید و برد تابع k همان برد تابع f می‌باشد.

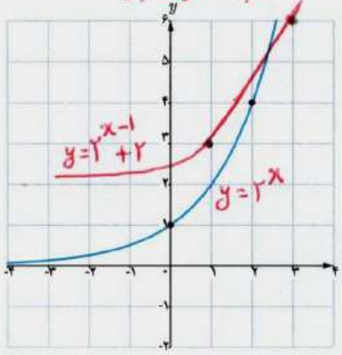
بازه دامنه g همان بازه دامنه تابع f است و بازه برد تابع g از انتقال ۳ واحد برد f در راستای قائم و به سمت بالا به دست می‌آید.

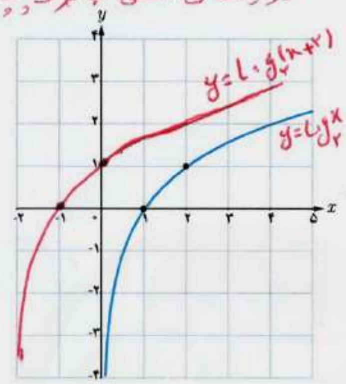
۲ در زیر، نمودار توابع $y=2^x$، $y=\log_2 x$ و $y=\cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y=2^{x-1}+2$، $y=\log_2(x+2)$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنید.

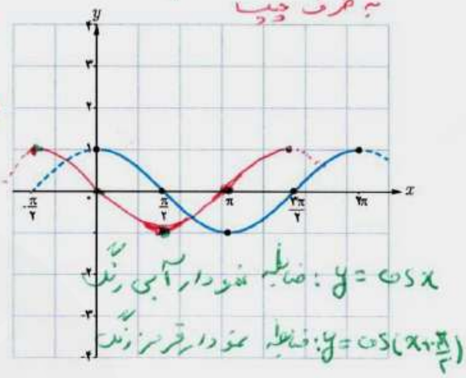
رسم: با انتقال یک واحد در راستای افقی به طرف راست و دو واحد در راستای قائم به طرف بالا

رسم: با انتقال ۲ واحد در راستای افقی به طرف چپ

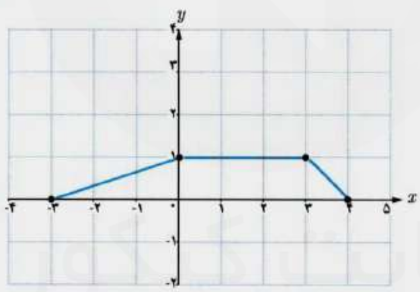
رسم: با انتقال $\frac{\pi}{2}$ در راستای افقی به طرف چپ



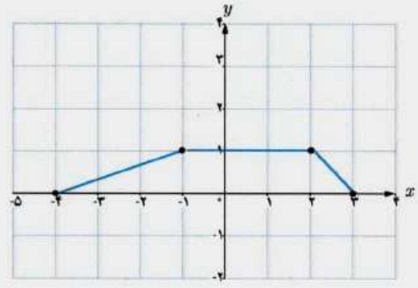




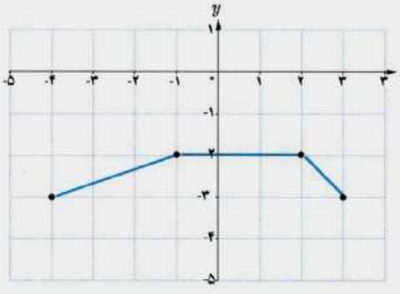
مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ را رسم می‌کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ رسم شود (شکل ب).



(الف)



(ب)

انبساط و انقباض عمودی

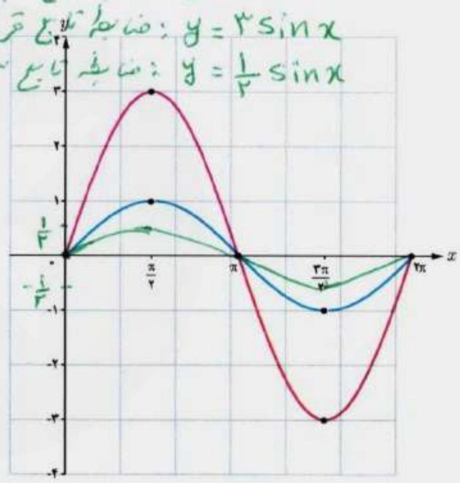
فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = ۳\sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه $[۰, ۲\pi]$ رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

$y = \sin x$: ضابطهٔ تابع آبی رنگ

$y = ۳\sin x$: ضابطهٔ تابع قرمز رنگ

$y = \frac{۱}{۲}\sin x$: ضابطهٔ تابع سبز رنگ



x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y=\sin x$	۰	۱	۰	۱-	۰
$y=۳\sin x$	۰	۳	۰	۳-	۰
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰

۲ با مقایسهٔ نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y = \sin x$ دارند؟

نمودار تابع $y = ۳\sin x$ نسبت به نمودار تابع $y = \sin x$ ، انبساطی عمودی با ضریب انبساط ۳ داشته است.

نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ نسبت به نمودار تابع $y = \sin x$ ، انقباضی عمودی با ضریب انقباضی $\frac{۱}{۲}$ داشته است.

۳ دامنه و برد توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با دامنه و برد تابع $y = \sin x$ دارند؟

دامنه تابع $y = ۳\sin x$ همان دامنه تابع $y = \sin x$ است. ولی برد تابع $y = ۳\sin x$ نسبت به برد تابع $y = \sin x$ انبساطی عمودی با ضریب انبساط ۳ داشته است به این صورت که برد تابع $y = \sin x$ ، $[-۱, ۱]$ می‌باشد و برد تابع $y = ۳\sin x$ ، $[-۳, ۳]$ می‌باشد

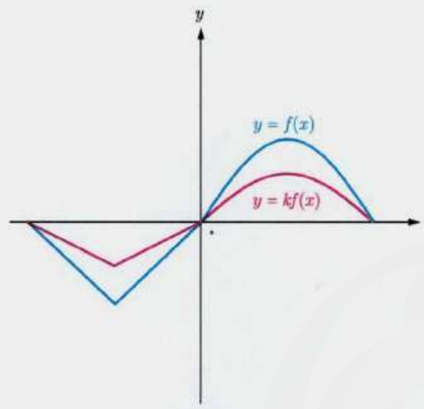
در حالت کلی اگر $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$g(x_۰) = kf(x_۰) = ky_۰$$

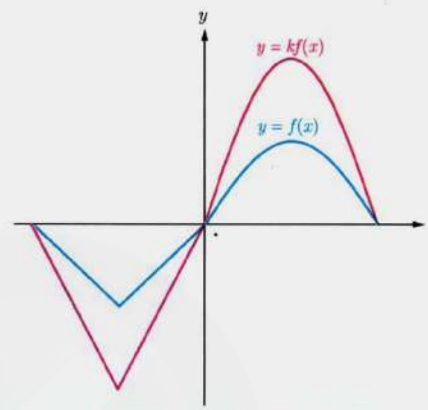
بنابراین $(x_۰, ky_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطه $(x_۰, y_۰)$ از نمودار تابع f است.

ادامه جواب ۳: دامنه تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ همان دامنه تابع $y = \sin x$ است ولی برد تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ نسبت به برد تابع $y = \sin x$ انقباضی عمودی با ضریب انقباض $\frac{۱}{۲}$ داشته است به این صورت که برد تابع $y = \sin x$ ، $[-۱, ۱]$ می‌باشد و برد تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ ، $[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$ می‌باشد.

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



$0 < k < 1$



$k > 1$

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.

کار در کلاس

★ حل این کار درکلاس درصفحه بعد ★

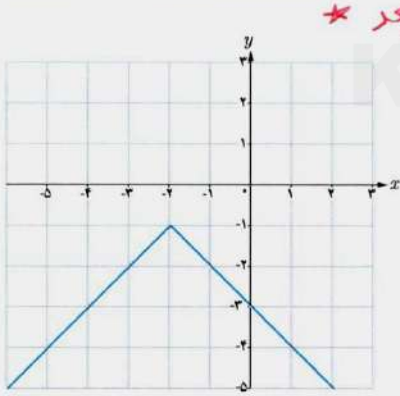
۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.

۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.

الف) $y = -x^2$

ب) $y = 2x^2 - 1$

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

حل کار در کلاس صفحه ۷:

حل کار در کلاس ۱:

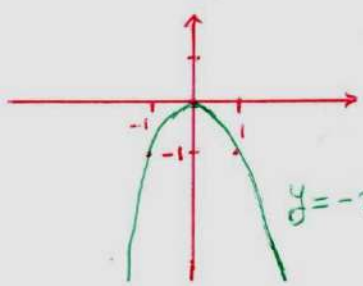
حالت $k>0$:

دامنه تابع $y=kf(x)$ (برای $k>0$) همان دامنه تابع $y=f(x)$ یعنی $[a,b]$ می باشد و برد تابع $y=kf(x)$ (برای $k>0$) برابر $[kc, kd]$ می باشد.

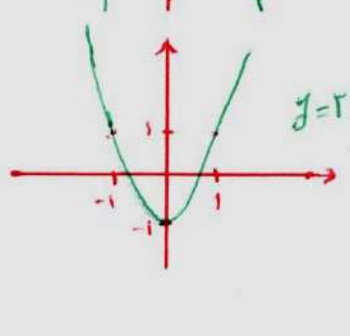
حالت $k<0$:

دامنه تابع $y=kf(x)$ (برای $k<0$) همان دامنه تابع $y=f(x)$ یعنی $[a,b]$ می باشد و برد تابع $y=kf(x)$ (برای $k<0$) برابر $[k.d , k.c]$ می باشد.

حل کار در کلاس ۲:



الف) برای رسم نمودار تابع $y=-x^2$، کافی است نمودار $y=x^2$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



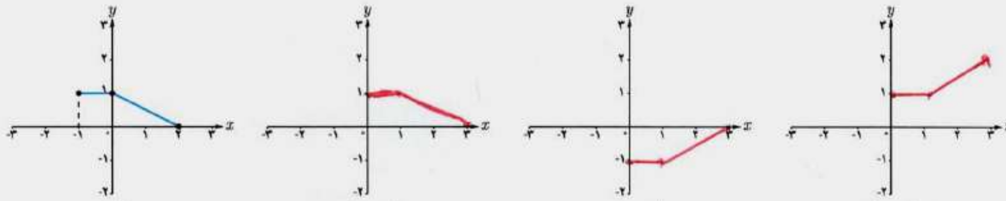
ب) برای رسم نمودار تابع $y=2x^2-1$، ابتدا نمودار تابع $y=x^2$ انبساطی عمودی با ضریب انبساط ۲ خواهد داشت سپس نمودار حاصل ۱ واحد در راستای قائم به طرف پائین منتقل می شود.

پ) $y=-|x+2|-1$

توضیح قسمت پ) در نمودار تابع رسم شده، ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ دو واحد در راستای افقی به طرف چپ منتقل می شود که ضابطه آن به $y=|x+2|$ تبدیل می شود سپس نسبت به محور xها قرینه شده است که ضابطه آن تبدیل به $y=-|x+2|$ می شود و در آخر یک واحد در راستای قائم به طرف پائین منتقل می شود که ضابطه آن را به $y=-|x+2|-1$ تبدیل می کند.

* پاسخ کار در کلاس ۳ در دستگاه های مختصات موجود در سوال داده شده است.

۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y = -f(x-1)+2$ را رسم کنید.



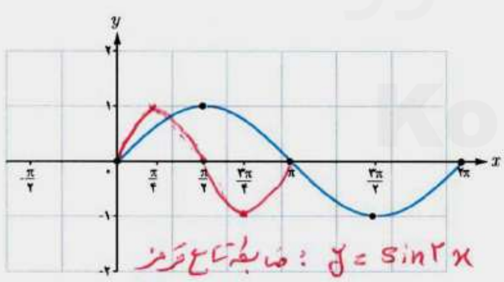
$y = f(x)$ — $y = f(x-1)$ — $y = -f(x-1)$ — $y = -f(x-1)+2$

انبساط و انقباض افقی

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع $y = \sin x$ در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم شده است.

۱ با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع $y = \sin 2x$ مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله $[0, \pi]$ رسم کنید.



ضابطه تابع قرمز: $y = \sin 2x$

ضابطه تابع آبی: $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \sin 2x$	0	1	0	-1	0

۲ با مقایسه نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = \sin 2x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

* نمودار تابع $y = \sin 2x$ نسبت به نمودار تابع $y = \sin x$ انقباض افقی با ضریب انقباض ۲ دارد

* دوره تناوب تابع $y = \sin x$ ، $T = 2\pi$ می‌باشد و دوره تناوب تابع $y = \sin 2x$ ، $T = \pi$ می‌باشد.

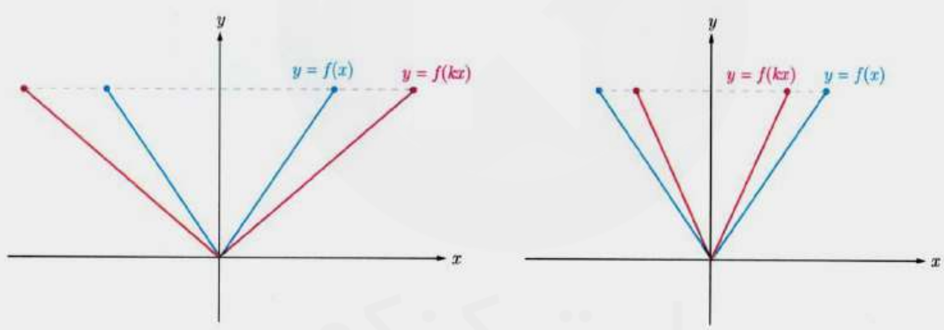
در حالت کلی اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه دلخواه از نمودارتابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد،

آنگاه :
$$g(\frac{x_\circ}{k}) = f(k\frac{x_\circ}{k}) = f(x_\circ) = y_\circ$$

بنابراین نقطه $(\frac{x_\circ}{k}, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

در شکل های زیر، نمودارتابع $y = f(kx)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



ب) $0 < k < 1$ الف) $k > 1$

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

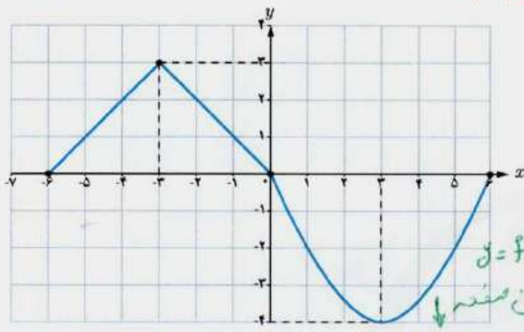
حل ۱ :

★ برای $k>0$: دامنه تابع $y=f(kx)$ (برای $k>0$) برابر $[\frac{1}{k}a, \frac{1}{k}b]$ می‌باشد و برد تابع $y=f(kx)$ (برای $k>0$) همان برد تابع $y=f(x)$ یعنی $[c,d]$ می‌باشد.

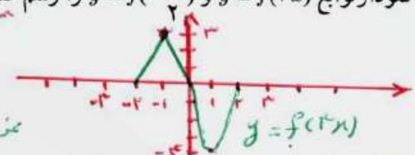
★ برای $k<0$: دامنه تابع $y=f(kx)$ (برای $k<0$) برابر $[\frac{1}{k}b, \frac{1}{k}a]$ می‌باشد و برد تابع $y=f(kx)$ (برای $k<0$) همان برد تابع $y=f(x)$ یعنی $[c,d]$ می‌باشد.

کار در کلاس

۱ اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y=f(kx)$ را برای $k>0$ و $k<0$ تعیین کنید. حل این کار در کلاس در بالای صفحه ↑



۲ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار توابع $y=f(3x)$ و $y=f(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

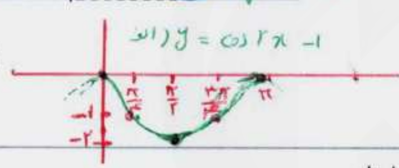


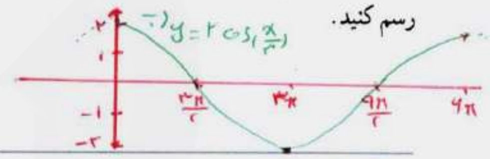
نمودار $y=f(-\frac{x}{2})$ پایین صفحه ↓

۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید.

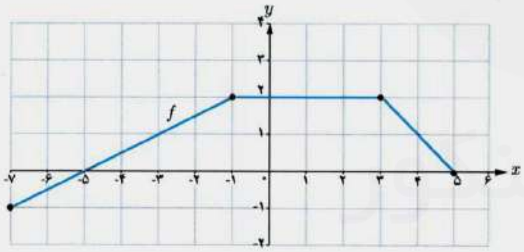
الف) $y=\cos 2x-1$

ب) $y=2\cos(\frac{x}{3})$



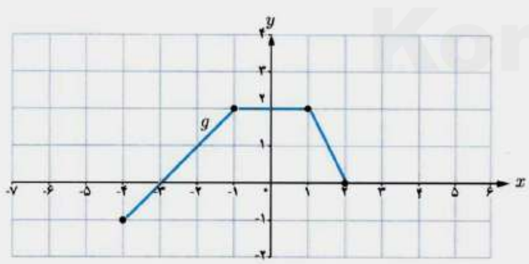


مثال : اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(2x+1)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.



اگر $A=(x_0, y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه $A'=\left(\frac{x_0-1}{2}, y_0\right)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g است، زیرا[1] :

$$g\left(\frac{x_0-1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{x_0-1}{2}\right)+1\right)=f(x_0-1+1)=f(x_0)=y_0$$

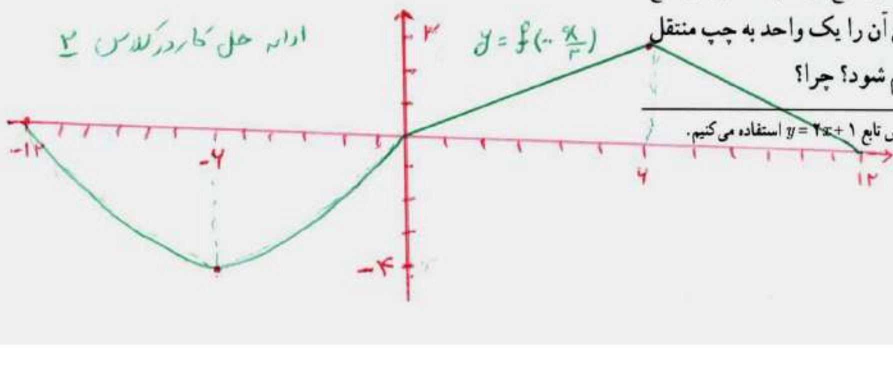


بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.

با توجه به اینکه $\frac{x_0-1}{2}=\frac{x_0}{2}-\frac{1}{2}$، آیا می‌توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد کنید؟

آیا می‌توان برای رسم نمودار تابع g، ابتدا نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا $g(x)=f(2x+1)$ رسم شود؟ چرا؟

ادامه حل کار در کلاس ۲



۱ــ برای یافتن طول نقطه A'، از معکوس تابع $y=2x+1$ استفاده می‌کنیم.

تمرین

۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف) $y=\sqrt{۲+x}$ $\longrightarrow$ a

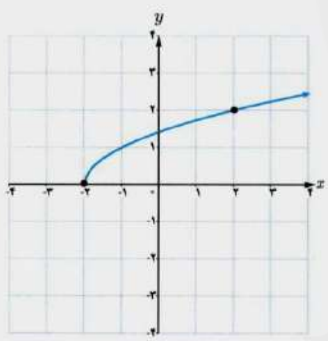
ب) $y=۲+\sqrt{x}$ $\longrightarrow$ d

پ) $y=-۲\sqrt{x}$ $\longrightarrow$ e

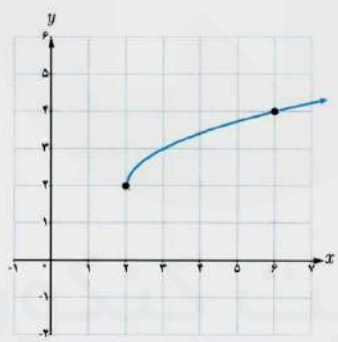
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$ $\longrightarrow$ c

ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$ $\longrightarrow$ b

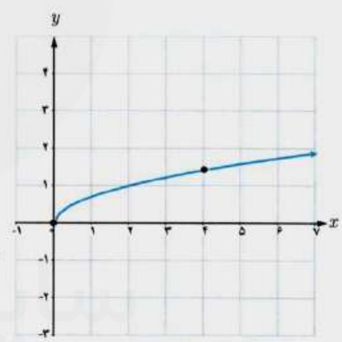
ج) $y=\sqrt{-۲x}$ $\longrightarrow$ f



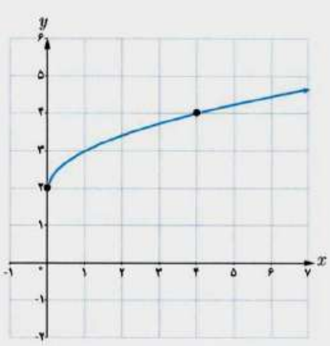
(a)



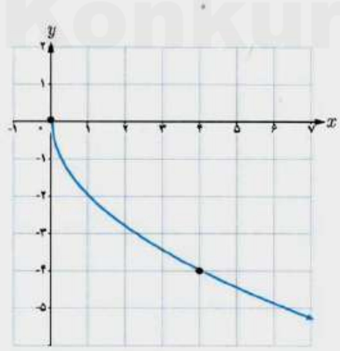
(b)



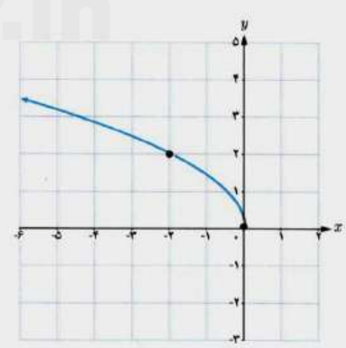
(c)



(d)

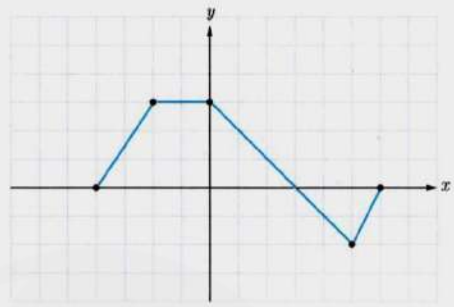


(e)



(f)

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(-x)$

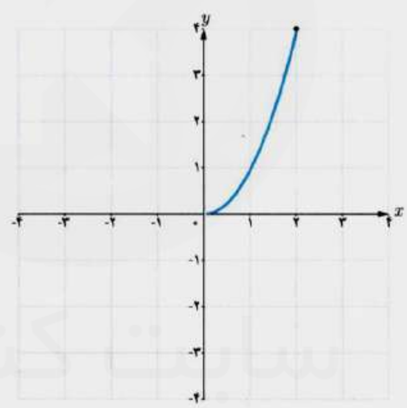
ب) $y = ۲f(x-۱)$

پ) $y = -f(x) + ۲$

ت) $y = f(۲x-۱)$

ث) $y = f(۳-x)$

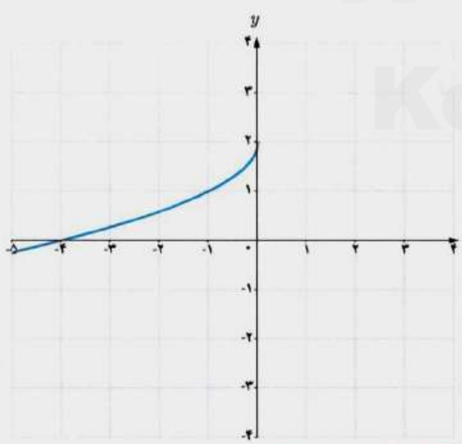
۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.



الف) $y = f(-x)$

ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$



۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.

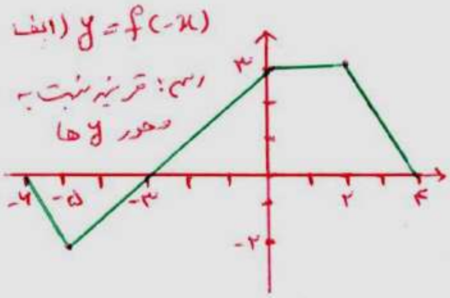
نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ هم نسبت به محور xها
و هم نسبت به محور yها قرینه شده است
و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده
است بنابراین ضابطه این تابع به صورت زیر می‌باشد:

$y = -\sqrt{-x} + ۲$

حل تمرین صفحه ۱۲

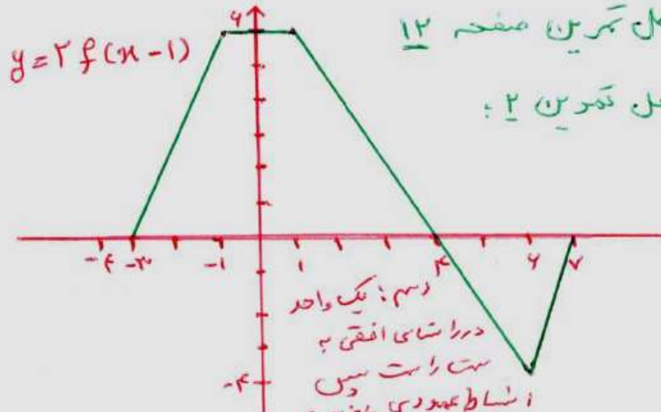
حل تمرین ۲ :

الف) $y=f(-x)$



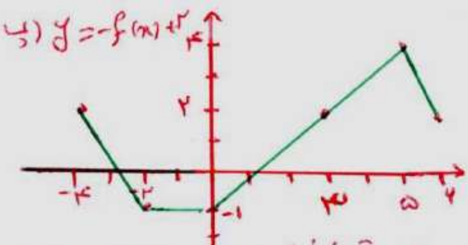
رسم: قرینه نسبت به محور y ها

ب) $y=2f(x-1)$



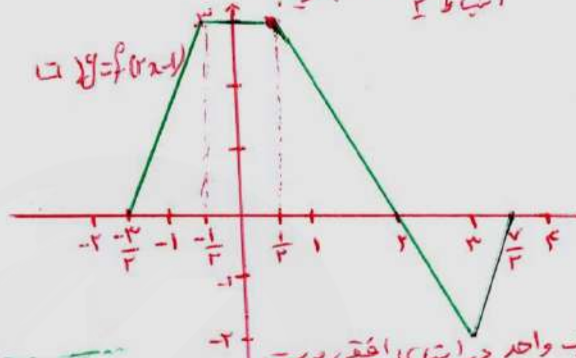
رسم: یک واحد در راستای افقی به سمت راست سپس انبساط عمودی با ضریب انبساط ۲

پ) $y=-f(x)+2$



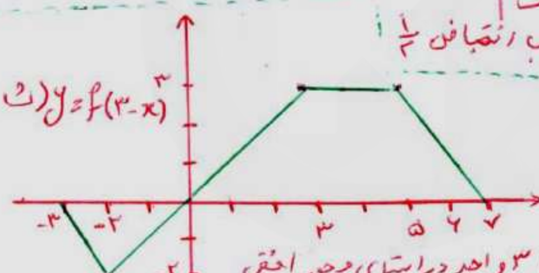
رسم: قرینه نسبت به محور x ها و سپس ۲ واحد در راستای عمودی به بالا

ت) $y=f(2x-1)$



رسم: یک واحد در راستای افقی به سمت راست و سپس انقباض افقی با ضریب انقباض $\frac{1}{2}$

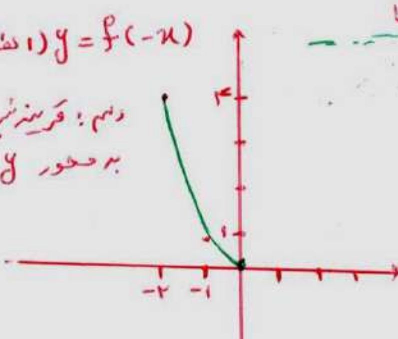
ث) $y=f(3-x)$



رسم: ۳ واحد در راستای محور افقی به سمت چپ و سپس قرینه نسبت به محور y ها

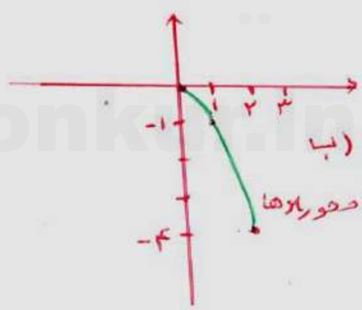
حل تمرین ۳ :

الف) $y=f(-x)$



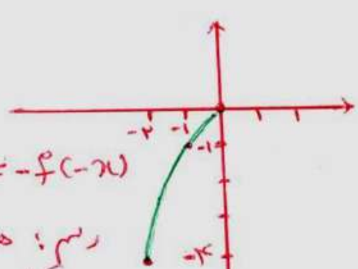
رسم: قرینه نسبت به محور y ها

ب) $y=-f(x)$



رسم: قرینه نسبت به محور x ها

پ) $y=-f(-x)$



رسم: هم نسبت به محور x ها قرینه می کنیم و هم نسبت به محور y ها قرینه می کنیم

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

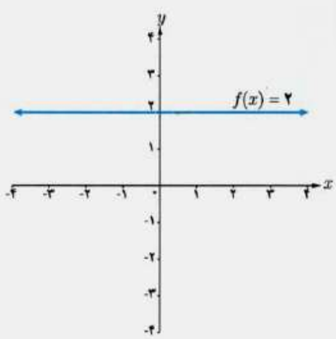
درس ۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

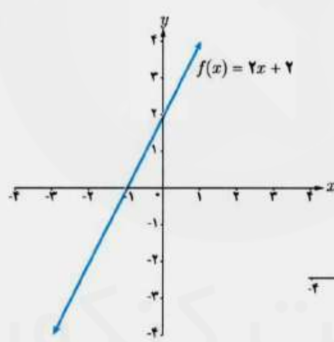
فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و a_0، a_1، a_2، ...، a_{n-1} و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع چند جمله‌ای از درجه** n نامیده می‌شود.[1]

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

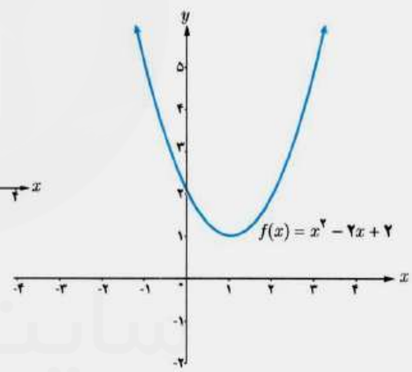
تابع ثابت $f(x) = c$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq 0$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



تابع درجه دو

کار در کلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

درجه ۱ — $f(x) = 2x - 3$ ، درجه ۳ — $h(x) = x^3 + x - 4$ ، درجه ۴ — $n(x) = 2x - x^4$

$g(x) = (x-1)^2 + 3$ — درجه ۲ ، $m(x) = 5$ — درجه صفر ، $p(x) = x^2(1-x)^3$ — درجه ۵

۱ـ برای $f(x) = 0$، درجه تعریف نمی‌شود.

تهیه کننده :

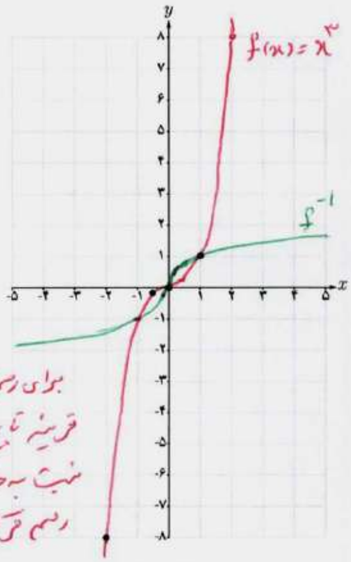
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

فعالیت

یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع $f(x) = x^3$ است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

x	$y = x^3$
-2	$(-2)^3 = -8$
-1	$(-1)^3 = -1$
$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$
1	1
2	$2^3 = 8$



برای رسم تابع وارون قرینه تابع $y = x^3$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کردیم.

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است. این تابع یک تابع یک به یک است چون هر خط موازی محور xها نمودار آن را در یک نقطه قطع می‌کند پس وارون پذیر است.

۳ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.

$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

کار در کلاس

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

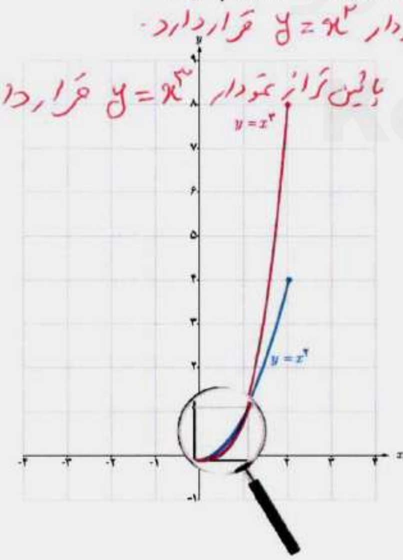
الف) $y = (x+1)^3$ ب) $y = -x^3+1$ پ) $y = x^3-3x^2+3x$

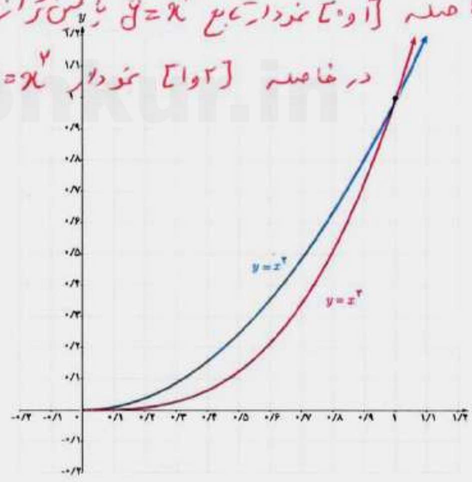
۲ نمودار هر یک از توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ در فاصله $[0,2]$ رسم شده است.

در فاصله $[0,1]$، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[1,2]$ چطور؟

در فاصله $[0, 1]$ نمودار تابع $y = x^3$ پایین‌تر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

در فاصله $[1, 2]$ نمودار $y = x^2$ پایین‌تر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.





تهیه کننده :

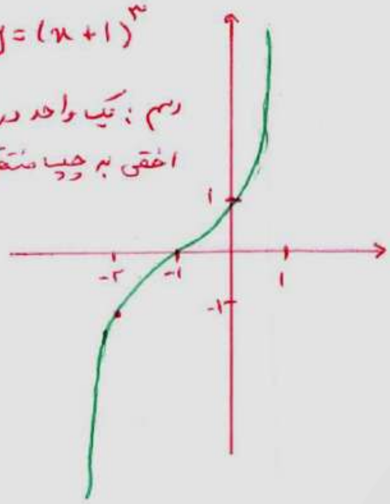
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

حل کار در کلاس صفحه ۴۱ :

حل ۱ :

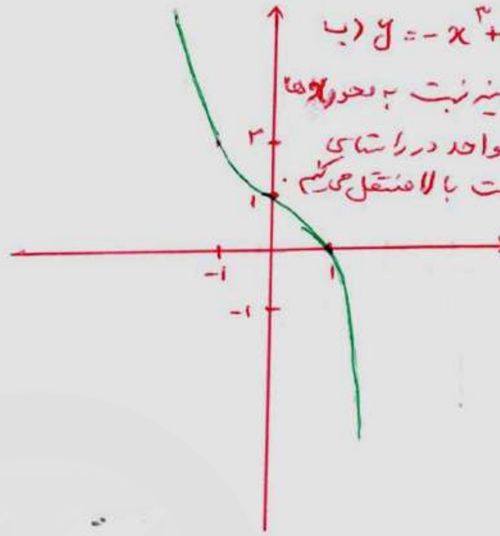
الف) $y=(x+1)^3$

رسم: یک واحد در راستای افقی به چپ منتقل می‌کنیم



ب) $y=-x^3+1$

رسم: قرینه نسبت به محور xها سپس یک واحد در راستای قائم به سمت بالا منتقل می‌کنیم.

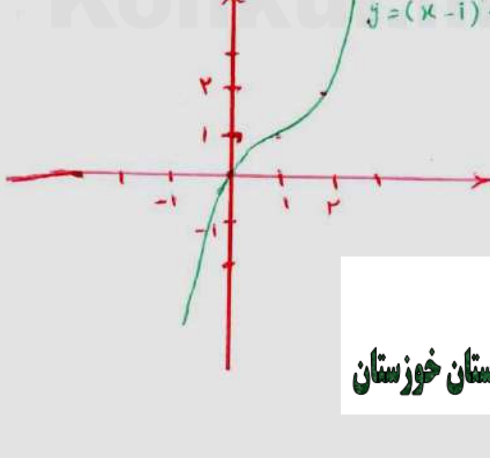


پ) $y=x^3-3x^2+3x$

ابتدا تابع قسمت پ را به صورت $y=(x+a)^3+b$ می‌نویسیم:

$$y = x^3-3x^2+3x = \underbrace{x^3-3x^2+3x-1}_{\text{اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای}}+1 = (x-1)^3+1$$

اکنون برای رسم: یک واحد در راستای افقی به راست و یک واحد در راستای قائم به سمت بالا منتقل می‌کنیم.



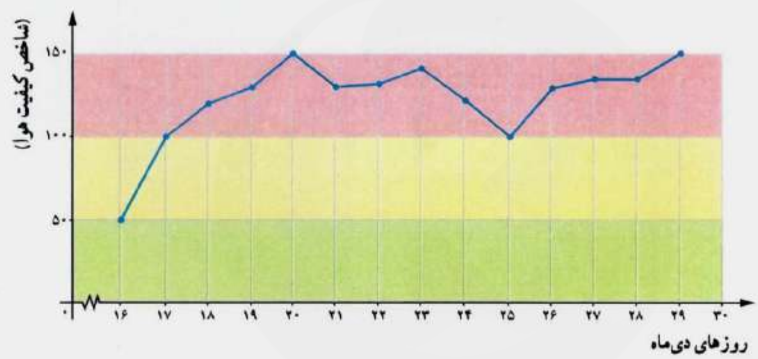
تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

توابع صعودی و توابع نزولی

فعالیت

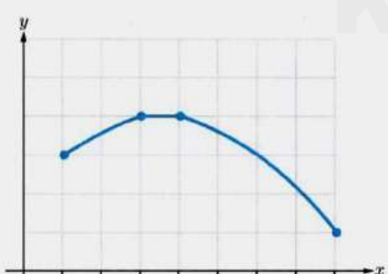
تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه، یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.



الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه افزایش بوده است؟ در فاصله های زمانی [۱۶,۲۰] و [۲۱,۲۳] و [۲۵,۲۷] و [۲۸,۲۹]

ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه کاهش بوده است؟ در فاصله های زمانی [۲۰,۲۱] و [۲۳,۲۵]

پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟ در فاصله زمانی [۲۷,۲۸]



دامنهٔ تابع f که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه $[1,8]$ است. در بازه $[1,3]$، هم‌زمان با افزایش x، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع f در بازه $[1,3]$ صعودی می‌گوییم. در بازه $[3,4]$ مقدار تابع ثابت است.

در ادامه و در بازه $[4,8]$، هم‌زمان با افزایش x، نمودار تابع روبه پایین می‌رود و به همین منظور به تابع f در بازه $[4,8]$ نزولی گفته می‌شود.

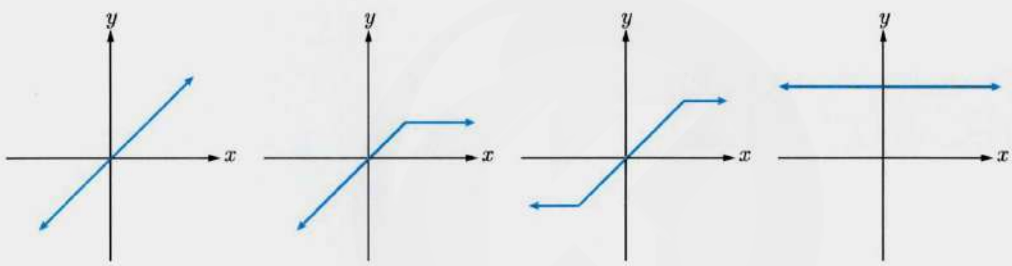
تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

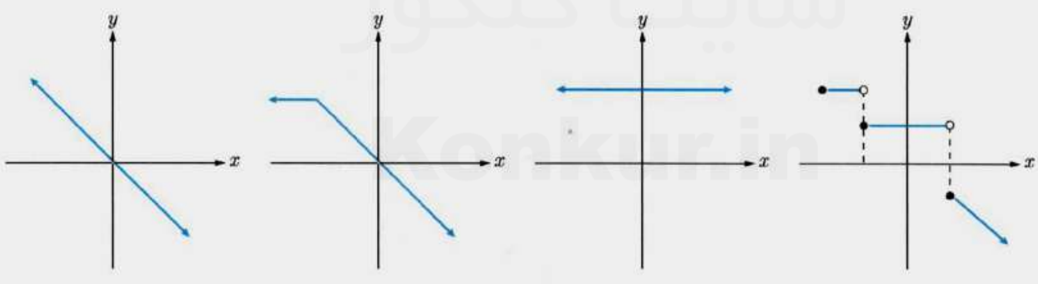
توابع صعودی و توابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه a و b از دامنه تابع f که $a < b$، داشته باشیم $f(a) \le f(b)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم. از آنجائی که معمولاً رفتار تابع را در بازه‌هایی از اعداد حقیقی بررسی می‌کنیم، بنابراین می‌توان گفت :

تابع f را در یک بازه، **صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) \le f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، رو به پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.



تابع f را در یک بازه، **نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) \ge f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، رو به بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.



به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا می‌گوییم.

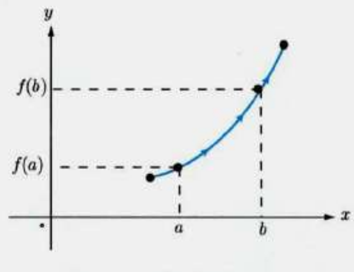
✤ تابع f را در یک بازه، **ثابت** می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار $f(x)$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک‌بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

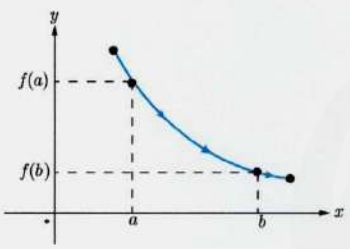
توابع اکیداً صعودی و توابع اکیداً نزولی

❖ تابع f را در یک بازه، **اکیداً صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به بالا خواهیم رفت. (شکل الف)



الف) تابع اکیداً صعودی

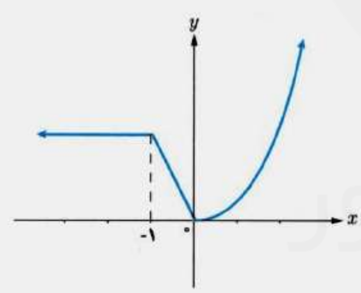
❖ تابع f را در یک بازه، **اکیداً نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به پایین خواهیم رفت. (شکل ب)



ب) تابع اکیداً نزولی

به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.

❖ **مثال:** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty,-1]$ تابع f ثابت است. همچنین در فاصله $[-1,0]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[0,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.



کار در کلاس

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه $(-\infty,-1]$ اکیداً نزولی و در بازه $[-1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

$$f(x) = x^2 + 2x \quad , \quad g(x) = 2^{-x} \quad , \quad h(x) = |x+2|$$

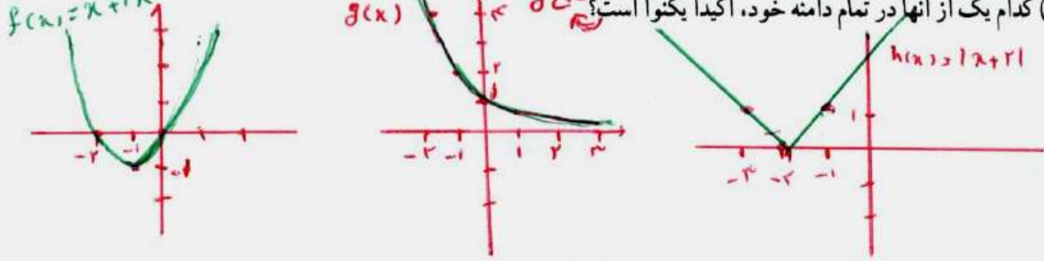
تابع g در بازه $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

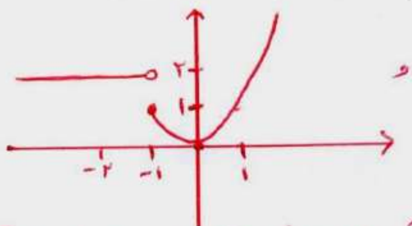
$f(x) = x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1$

تابع h در بازه $(-\infty,-2]$ اکیداً نزولی و در بازه $[-2,+\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.

ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنوا است؟ تابع g



۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2} & x\geq -1 \\ 2 & x<-1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



تابع f در بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $[0,+\infty)$ صعودی و در بازه $(-\infty,0]$ نزولی است.

جواب ۳: الف) بله، چون اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد آنگاه برای هر a و b در آن فاصله که $a<b$ آنگاه: $f(a)<f(b)$

واضح است از $f(a)<f(b)$ می‌توان نتیجه گرفت $f(a)\leq f(b)$ بنابراین تابع f صعودی است.

۳

الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید. خیر:

مثال نقض: $f(x)=\begin{cases} 3x-2 , & x\geq 1 \\ 1 & x<1 \end{cases}$

طبق نمودار تابع f یک تابع صعودی روی دامنه خودش می‌باشد ولی اکیداً صعودی نیست.

۴

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a)\leq f(b)$ نشان دهید که $a\leq b$.

ب) اگر $\log(x+1)\leq \log(2x-3)$، حدود x را به‌دست آورید. (حل قسمت (ب) پایین صفحه)

الف) اثبات (برهان خلف): فرض $a\nleq b$ بنابراین $b<a$ و چون f روی فاصله مذکور اکیداً صعودی است پس طبق تعریف تابع اکیداً صعودی می‌توان نوشت: $f(b)<f(a)$ که این خلاف فرض صورت سؤال یعنی $f(a)\leq f(b)$ می‌باشد بنابراین فرض برهان خلف باطل است و $a\leq b$

تقسیم و بخش‌پذیری

فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. توابع چند جمله‌ای $f(x)=x^{3}-3x^{2}+1$ و $p(x)=x^{2}-2$ را درنظر می‌گیریم.

الف) اگر $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ باشند. نشان دهید که $q(x)=x-3$ و $r(x)=2x-5$.

ب) درستی تساوی $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$ را بررسی کنید.

الف)

$$\begin{array}{l|l} x^{3}-3x^{2}+1 \;\; (f(x)) & x^{2}-2 \;\; (p(x)) \\ -x^{3}+2x & x-3 \;\; (q(x)) \\ \hline -3x^{2}+2x+1 & \\ +3x^{2}-6 & \\ \hline 2x-5 \;\; (r(x)) & \end{array}$$

$q(x)=x-3$

$r(x)=2x-5$

قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر بفرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که:

حل قسمت (ب) فعالیت: از طرف راست به طرف چپ می‌رسیم:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

$p(x)\cdot q(x)+r(x)=(x^{2}-2)(x-3)+2x-5=x^{3}-3x^{2}+1=f(x)$

که در آن $r(x)=0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x)=0$ باشد، چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای p بخش‌پذیر است.

حل قسمت (ب) کاردرکلاس بالا: می‌دانیم تابع لگاریتم با پایه ۱۰ یک تابع اکیداً صعودی می‌باشد بنابراین به کمک قسمت الف می‌توان نوشت:

$\log(x+1)\leq \log(2x-3) \xrightarrow{\text{قسمت الف}} x+1\leq 2x-3 \Rightarrow -x\leq -4 \Rightarrow x\geq +4 \rightarrow$ مجموعه جواب $=[+4,+\infty)$

کار در کلاس

اگر $f(x) = x^4 - 16$ و $p(x) = x+2$، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

$$f(x) = x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = \underbrace{(x^2+4)(x-2)}_{q(x)}\underbrace{(x+2)}_{p(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}$$

چون $r(x) = 0$ بنابراین $x^4 - 16$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است.

فعالیت

در تقسیم $f(x) = x^3 + 2$ بر $p(x) = 2x-1$، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌اند.

الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است. می‌دانیم در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ درجه باقیمانده یعنی $r(x)$ از درجه مقسوم علیه $p(x)$ کمتر است و چون درجه $p(x)$ یک می‌باشد پس درجه $r(x)$ صفر است.

ب) با توجه به قضیه تقسیم می‌توان نوشت:

$$f(x) = (2x-1)\, q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله‌ای $p(x) = 2x-1$ را به‌دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f(\frac{1}{2})$. به‌طور کلی می‌توان گفت:

$$p(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = (2(\tfrac{1}{2}) - 1)\cdot q(x) + r(x) = 0 \times q(x) + r(x) = r(x)$$

$$\Rightarrow r(x) = f(\tfrac{1}{2})$$

قضیه: باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت‌است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.

کار در کلاس

۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^3 + x - 2$ را بر $2x+1$ به‌دست آورید.

$$r(x) = f(-\frac{b}{a}) = f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2}) - 2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{21}{8}$$

۲ اگر چند جمله‌ای $x^2 + ax - 2$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید. چون $f(x) = x^2 + ax - 2$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است بنابراین:

$$r(x) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow a^2 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2 = 0$$

$$2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

حل سؤال ۱ فعالیت:

$$\begin{array}{l|l} x^4-a^4 & x-a \\ \hline -x^4 \pm ax^3 & x^3+ax^2+a^2x+a^3 \\ ax^3-a^4 & \\ -ax^3 \pm a^2x^2 & \\ a^2x^2-a^4 & \\ -a^2x^2 \pm a^3x & \\ a^3x-a^4 & \\ -a^3x \mp a^4 & \end{array}$$

از تقسیم انجام شده نتیجه می‌گیریم: $\Longrightarrow x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$

فعالیت

با اتحادهای زیر از سال‌های قبل، آشنا هستید.

$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ و $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

۱ از تقسیم x^4-a^4 بر $x-a$ نشان دهید که:

$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$

۲ آیا x^n-a^n ($n\in\mathbb{N}$) بر $x-a$ بخش‌پذیر است؟ بله چون: اگر $f(x)=x^n-a^n$ باشد داریم: $r(x)=f(a)$

بنابراین: $r(x)=a^n-a^n=0$

جواب فعالیت ۳

۳ از تقسیم x^n-a^n بر $x-a$ نشان دهید که x^n-a^n به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$\begin{array}{l|l} x^n-a^n & x-a \\ \hline -x^n \pm ax^{n-1} & x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1} \\ ax^{n-1}-a^n & \\ -ax^{n-1} \pm a^2x^{n-2} & \\ a^2x^{n-2}-a^n & \\ -a^2x^{n-2} \pm a^3x^{n-3} & \\ a^3x^{n-3}-a^n & \\ \vdots & \\ a^{n-2}x^2-a^n & \\ -a^{n-2}x^2 \pm a^{n-1}x & \\ a^{n-1}x-a^n & \\ -a^{n-1}x \pm a^n & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

۴ چند جمله‌ای‌های x^5-1 و x^6-64 را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

از تقسیم نتیجه می‌گیریم: $\Longrightarrow x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$

جواب فعالیت ۴

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^6-64=x^6-2^6=(x-2)(x^5+2x^4+2^2x^3+2^3x^2+2^4x+2^5)$

$=(x-2)(x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32)$

کار در کلاس

۱ در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$$

اگر n فرد باشد در فعالیت بالا با تبدیل a به $-a$ داریم:

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای x^5+1 را تجزیه کنید.

$x^n-(-a)^n=(x-(-a))(x^{n-1}+(-a)x^{n-2}+(-a)^2x^{n-3}+\cdots+(-a)^{n-2}x+a^{n-1})$

$\xRightarrow{n \text{ فرد است}} x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$

۲ در فعالیت بالا، اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای x^4-16 را طوری تجزیه کنید که $x+2$ یک عامل آن باشد.

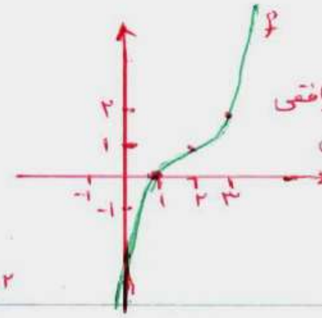
در فعالیت بالا اگر n زوج باشد با تبدیل a به $-a$ داریم:

$x^n-(-a)^n=(x-(-a))(x^{n-1}+(-a)x^{n-2}+(-a)^2x^{n-3}+\cdots+(-a)^{n-2}x+a^{n-1})$

$\xRightarrow{n \text{ زوج}} x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1})$

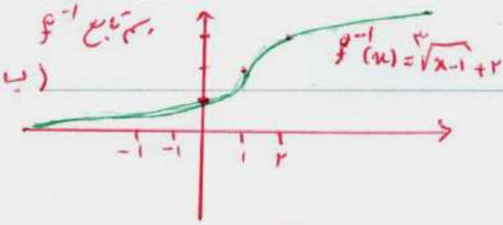
بنابراین: $x^4-16=x^4-2^4=(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)$

(الف : حل تمرین ۱



رسم : دو واحد در راستای محور افقی به راست و یک واحد در راستای قائم به سمت بالا

ب) رسم تابع f^{-1}



تمرین

۱ تابع $f(x)=(x-2)^3+1$ را درنظر بگیرید.

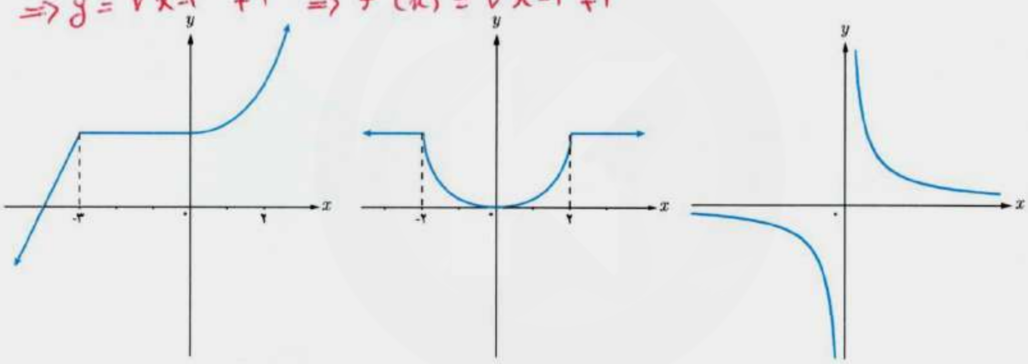
الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=x^3$ رسم کنید. بالا ↑

ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. تابع f یک تابع یک به یک است چون هر خط موازی محور x ها (نمودار) آن را در یک نقطه قطع می‌کند.

پ) ضابطه f^{-1} را به‌دست آورید.

پ) $y=(x-2)^3+1 \Rightarrow (x-2)^3=y-1 \Rightarrow x-2=\sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}+2$
$\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}+2 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+2$

۲ نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.



$y=f(x)$ $\quad$ $y=g(x)$ $\quad$ $y=h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟ تابع f در بازه‌های $(-\infty,-3]$ و $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ صعودی است.

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟ تابع g در $[-2,0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[2,+\infty)$ و $(-\infty,0]$ نزولی است.

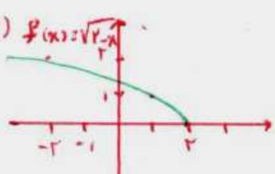
پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟ تابع h در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

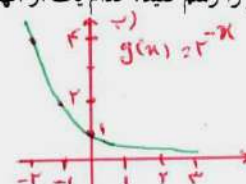
۳ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟

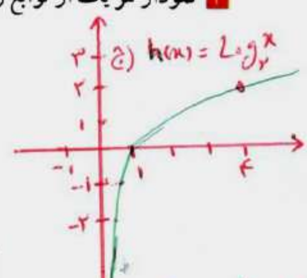
الف) $f(x)=\sqrt{2-x}$

ب) $g(x)=2^{-x}$

ج) $h(x)=\log_2 x$







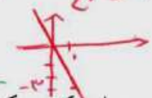
تابع f در دامنه خود اکیداً نزولی است بنابراین تابع f در دامنه خود اکیداً یکنواست.

تابع g در دامنه خود اکیداً نزولی است بنابراین تابع g در دامنه خود اکیداً یکنواست.

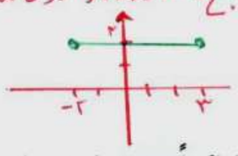
تابع h در دامنه خود اکیداً صعودی است بنابراین تابع h در دامنه خود اکیداً یکنواست.

حل قسمت دوم سؤال ۵ : خیر : اگر f و g روی یک فاصله اکیداً صعودی باشند ; ادامه حل ۵
نمی‌توان گفت همواره $f-g$ نیز اکیداً روی آن فاصله صعودی است.
مثال نقض : توابع $f(x)=2x+4$ و $g(x)=5x+4$ روی دامنه خود اکیداً صعودی هستند ولی:

$(f-g)(x) = 2x+4-(5x+4) = -3x$ که یک تابع اکیداً نزولی می‌باشد $\xrightarrow{\text{رسم}}$



۴ آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟ بله . مثال تابع ثابت $f(x)=2$ در فاصله $[-2,3]$ هم صعودی است و هم نزولی



۵ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟ (حل قسمت دوم در بالا)

حل قسمت اول سوال ۵:

تابع f روی فاصله I اکیداً صعودی است $\Rightarrow \forall a,b \in I\ ,\ a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

تابع g روی فاصله I اکیداً صعودی است $\Rightarrow \forall a,b \in I\ ,\ a<b \Rightarrow g(a)<g(b)$

$\xrightarrow{\text{جمع}} f(a)+g(a)<f(b)+g(b)$

$\Rightarrow \forall a,b \in I\ ,\ a<b \Rightarrow (f+g)(a)<(f+g)(b)$

بنابراین $f+g$ نیز اکیداً صعودی است (البته روی فاصله I)

۶ اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای x^3+kx^2+2 بر $x-2$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید. $f(x)=x^3+kx^2+2$

$r(x)=6 \Rightarrow r(x)=f(2)=6 \Rightarrow 2^3+k(2)^2+2=6 \Rightarrow 4k=6-10=-4$

$\Rightarrow k=\frac{-4}{4} \Rightarrow \boxed{k=-1}$

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

اگر $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ باشد :

f بر $x-2$ بخش‌پذیر است $\Rightarrow r(x)=f(2)=0 \Rightarrow 2^3+a(2)^2+b(2)+1=0 \Rightarrow 4a+2b=-9$

f بر $x+1$ بخش‌پذیر است $\Rightarrow r(x)=f(-1)=0 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=0 \Rightarrow a-b=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=-9 \\ 2a-2b=0 \end{cases}$ ، $6a=-9$

$\Rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{2}}$, $a-b=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}-b=0 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{3}{2}}$

۸ هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف) x^6-1 با عامل $x-1$

ب) x^6-1 با عامل $x+1$

پ) x^5+32 با عامل $x+2$

الف) $x^6-1=x^6-1^6=(x-1)(x^5+1\times x^4+1^2\times x^3+1^3\times x^2+1^4\times x+1^5)$
$=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

ب) $x^6-1=x^6-1^6=(x+1)(x^5-1\times x^4+1^2\times x^3-1^3\times x^2+1^4\times x-1^5)$
$=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

پ) $x^5+32=(x^5+2^5)=(x+2)(x^4-2x^3+2^2\times x^2-2^3\times x+2^4)$
$=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

۹ الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\ge b$.

ب) اگر $(\frac{1}{2})^{3x-2}\le\frac{1}{64}$ ، حدود x را به‌دست آورید.

حل قسمت الف سؤال : اثبات (برهان خلف) : فرض $a\ngeq b$ بنابراین $a<b$ می‌باشد از طرفی چون f روی فاصله مذکور اکیداً نزولی است بنابراین برای دو عضو a و b این فاصله $a<b$ نتیجه می‌شود $f(a)>f(b)$ و این خلاف فرض $f(a)\le f(b)$ موجود در صورت سؤال می‌باشد. از این تناقض نتیجه می‌شود فرض برهان خلف باطل است و $a\ge b$ می‌باشد.

حل قسمت ب سؤال ۹: می‌دانیم در تابع نمایی $f(x)=a^x$ ، اگر $0<a<1$ باشد این تابع اکیداً نزولی است بنابراین طبق قسمت الف همین تمرین داریم:

$(\frac{1}{2})^{3x-2}\le\frac{1}{64} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{3x-2}\le(\frac{1}{2})^6 \xrightarrow{\text{متساوی}} 3x-2\ge 6 \Rightarrow x\ge\frac{8}{3} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = [\frac{8}{3},+\infty)$

تهیه کننده :